実戦問題演習〈ハイレベル〉 東大・京大レベル (sample 001) [制限時間 : 75 分]

$\boxed{1}$ 集合 S を, m^2+n^2 $\bigl(m, n$ は整数$\bigr)$ の形で表される整数全体の集合, すなわち,

$$S=\{m^2+n^2 \mid m, n \text{ は整数}\}$$

とする. たとえば, $2018=13^2+43^2$ なので, 2018 は集合 S に属する。

(1) a を自然数とする. a が S に属するならば, a を 4 で割ったときの余りは, $0, 1, 2$ のいずれかであることを示せ。

(2) a, b を自然数とする. a, b がともに S に属するならば, ab もまた S に属することを示せ。

(3) 2018 より大きく, S に属する最小の自然数を求めよ。

$\boxed{2}$ 実数 x に対して, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

2 以上の整数 n に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k^3}{n}\right]$ と定める。例えば,

$$S_3=\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]=2, \quad S_5=\left[\frac{1}{5}\right]+\left[\frac{8}{5}\right]+\left[\frac{27}{5}\right]+\left[\frac{64}{5}\right]=18$$

である。以下の問いに答えよ。

(1) n を 2 以上の整数とし, k を n 未満の正の整数とする。 n と k が互いに素であるとき

$$\left[\frac{k^3}{n}\right]+\left[\frac{(n-k)^3}{n}\right]$$

を n, k についての整式として表せ。

(2) p を素数とするとき, S_p を p を用いて表せ。また, S_{23} を求めよ。

(3) p を素数とするとき, S_{p^2} を p を用いて表せ。また, S_{25} を求めよ。

$\Bigl(\boxed{3}$ は次のページに ... $\Bigr)$

$\boxed{3}$ 次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{1}{e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ただし, e は自然対数の底であり, その値は $e = 2.71 \cdots\cdots$ である。