

① (東京大学 2020 年理系 [1])

$a, b, c, p$  を実数とする。不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$bx^2 + cx + a > 0$$

$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数  $x$  の集合と、 $x > p$  を満たす実数  $x$  の集合が一致しているとする。

- (1)  $a, b, c$  はすべて 0 以上であることを示せ。
- (2)  $a, b, c$  のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。
- (3)  $p = 0$  であることを示せ。

② (東京大学 2015 年理系 [2])

どの目も出る確率が  $\frac{1}{6}$  のさいころを 1 つ用意し、次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ、出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き、4 のときは文字 B を、5 のときは文字 C を、6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ、同じ規則に従って、AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば、さいころを 5 回投げ、その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると、得られる文字列は、

A A C D A A B

となる。このとき、左から 4 番目の文字は D, 5 番目の文字は A である。

(1)  $n$  を正の整数とする。  $n$  回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)  $n$  を 2 以上の整数とする。  $n$  回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n - 1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ。

3 (東京大学 2023 年理系 [1])

(1) 正の整数  $k$  に対し,

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leq A_k \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数  $n$  に対し,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)| dx$$

とおく。極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  を求めよ。