$\boxed{1}$ 実数 x に対して, 関数 $f(x) = 8^x - 4^{x+\frac{1}{2}} + 2^x + \dfrac{23}{27}$ を考える。

(1) $2^x = t$ とおいて, $f(x)$ を t の式で表せ。

(2) (1) で求めた t の式を $g(t)$ とおく。 $t > 0$ のとき, 関数 $y = g(t)$ のグラフをかけ。

(3) $a > -2$ とする。 $-2 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値が 1 となるような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ a を実数とし, 座標平面上の曲線 $C : y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$ を考える。

(1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた 2 点のうち, x 座標の小さい方を点 A , もう一方を点 B とし, その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり, その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3) a の値が (2) で求めた範囲にあるとする。このとき, 曲線 C と (2) で定めた 直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ a を正の実数, b を 1 より大きい実数としたとき, 放物線 $C_1 : y = -ax^2 + b$ が半円 $C_2 : x^2 + y^2 = 1 \ \ (y \geqq 0)$ と 2 点で接している（すなわち, 共有点において共通の接線をもつ) とき次の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき, 放物線 C_1 と半円 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。